التحليل البُعدي

و

نظرية

الأنمذجة

π

إعداد و ترجمة

جلال الحاج عبد

المقدمه

يعتبر كتاب التحليل البُعدي و نظرية الأنمذجة[1] لمؤلفه لانغهار من الكتب المهمة في التحليل البُعدي و ذلك لبساطته و أحتوائه على أمثلة و نماذج عملية تميزه عن غيره من الكتب التي كتبت حول هذا الموضوع . معظم هذا الكتاب الذي بين أيديكم هو ترجمة من هذا الكتاب . و قد أضفت بعض الجداول للوحدات و القوانين الفيزيائية التي يُرجع اليها في التحليل البُعدي.

التحليل البُعدي من المواضيع المهمة و الأساسية في الهندسة و بخصوص هندسة الميكانيك في مواضيع الحرارة و المائعات . من خلال هذا البحث يمكن أستنتاج روابط تربط الكميات الفيزيائية أرتباطاً منطقياً يتناسب مع خصائص الكميات هذه ، بحيث نتيجة هذا الأرتباط مجموعة من الأعداد اللا بُعدية ، هذه الأعداد هي روابط بين هذه الكميات . تركيب هذه الأعداد اللا بُعدية عبارة عن دالة ، متغيراتها هذه الأعداد اللا بُعدية . هذه الدالة هي القانون الفيزيائي الذي تستنتج منه كمية مجهولة من خلال الكميات المعلومة.

إذن التحليل البُعدي عبارة عن طريقة لأكتشاف و أستنتاج القوانين . كذلك من خلاله يمكن تشخيص كيفية تأثير الكميات الفيزيائية في المسئلة ، هل هو تأثير مستقيم أم غير مستقيم أو ليس لها أي تأثير؟

يبدأ هذا الكتاب بشرح القوانين الفيزيائية و الميكانيكية و وحداتها و الأنظمه القياسية ، ثم شرح لنظرية باكينجهام و كيفية حل المسائل من خلال التحليل البُعدي ، ثم شرح نظرية الأنموذج و التشابه و أنواعه . هناك عدة تطبيقات للتحليل البُعدي في فروع الميكانيك و الفيزياء ، و التطبيقات التي بحثناها هي في هذه المجالات: ميكانيك الحرارة ، و المائعات ، و الجهد و الإنفعال، و في فيزياء الكمّ . هناك تطبيق للتحليل البُعدي في الكهرباء و المغناطيس لم نستطرق إليه . كذلك هناك فصل لعدد من الأمثله مع الجواب ، وكّلنا الحلّ التفصيلي للقراء . خاتمة الكتاب معجم لبعض أهم مصطلحات التحليل البُعدي و نظرية الأنموذج .

جلال الحاج عبد
2007

1- Dimensional Analysis and Theory of Models , Henry L. Langhaar , John Wiley & Sons, INC. 1971

الوحدات القياسيه في الأنظمه البُعدية

نبدأ هذا البحث بهذين النظامين للوحدات القياسية :

- نظام SGC ، في هذا النظام الحروف S و G و C بالترتيب هي الزمن الثانيه ، و الكتلة الغرام و الطول السانتي متر .

- نظام SKM ، في هذا النظام الحروف S و K و M بالترتيب الزمن ثانيه و الكتلة الكيلو غرام و الطول متر.

الفيزيائي و الفيلسوف الأسكتلندي ماكسول (Maxwell) أستعمل الحروف التاليه: (F) للقوة و (M) للكتلة و (L) للطول و (T) للزمن و (θ) للحرارة. أطلق تسمية الأبعاد على نتائج ضرب هذه الحروف و هي تحمل الأسس. يعتقد ماكسول بأهمية هذه الأبعاد في وجود تشابه بين فروع الفيزياء المختلفه كالميكانيك و الكهرباء و الحرارة. نالت هذه الأبعاد أهمية فيزيائيه و رياضيه فاقت أهميتها الفلسفيه.

تستنتج وحدة الكميات من التعاريف و الروابط و القوانين الفيزيائيه. على سبيل المثال حسب قانون نيوتن القوة عبارة عن $F = ma$ أي الكتلة في التعجيل و من حاصل ضرب وحدة الكتلة في وحدة التعجيل $\left[\frac{L}{T^2}\right]\times[M]$ نحصل على وحدة القوة $\left[\frac{ML}{T^2}\right]$ كذلك تكتب $\left[MLT^{-2}\right]$

تستقل وحدة الحرارة [θ] عن سائر الوحدات الميكانيكية الأخرى و هي عبارة عن وحدة مستقلة لا يمكن أستنتاجها من الطول و الكتلة و الزمن.

لا يوجد أي دليل يلزم أستعمال نظامين مختلفين للأبعاد كنظام الكتلة [M] و نظام القوة [F].

تجانس الأبعاد

قانون أو معادله أو رابطه في حالة هي متجانسه بُعدياً إلا إذا كانت وحدات الكميات المستعمله في هذه الروابط و القوانين و المعادلات هي من نفس النظام البُعدي . مثلاً إذا كانت الرابطة أو القانون بهذا الشكل:

$$f = a + b + c + d + \cdots$$

إذا كانت وحدات a و b و c و غيرها في نظام [MTL] فنتيجة الرابطة f هي كذلك في [MTL]. إذا كانت الكميات في نظامين قياسيين او أبعاديين مختلفين يجب توحيد النظامين بنظام واحد من خلال المعامل المخصوصة لكل من الوحدات. مثلاً الكتلة في نظام SKM هي كيلو غرام بينما في SGC هي غرام و كل كيلو غرام هو ألف غرام، ضريب التبديل هنا بين هذين النظامين هو ألف كذلك الحال مع الأنظمه الأخرى كالنظام الأمريكي و الأنجليزي و الأوربي ، في النظام الانجليزي الكتلة حسب الباوند و الكيلو غرام يساوي 2.2046226 بوند.

هذه بعض الجداول لتحويل الوحدات ، و بعض الثوابت الفيزيائية ، و الأعداد اللا بُعدية .

بعض الكميات الميكانيكيه و وحداتها

الكميه	نظام الكتلة	نظام القوة
الطول	$[L]$	$[L]$
الزمن	$[T]$	$[T]$
الحراره	$[\theta]$	$[\theta]$
القوة	$[MLT^{-2}]$	$[F]$
الكتله	$[M]$	$[FL^{-1}T^{2}]$
الكثافه المخصوصه	$[ML^{-2}T^{-2}]$	$[FL^{-3}]$
الكثافه	$[LM^{-3}]$	$[FL^{-4}T^{2}]$
الزاويه	$[1]$	$[1]$
الضغط	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$[FL^{-2}]$
السرعه	$[LT^{-1}]$	$[LT^{-1}]$
التعجيل	$[LT^{-2}]$	$[LT^{-1}]$
سرعه الزاويه	$[T^{-1}]$	$[T^{-1}]$
تعجيل الزاويه	$[T^{-2}]$	$[T^{-2}]$
الشغل	$[ML^{2}T^{-2}]$	$[FL]$
الجهد	$[MLT^{-2}]$	$[FT]$
الطاقه	$[ML^{2}T^{-3}]$	$[FLT^{-1}]$
العزم	$[ML^{2}T^{-2}]$	$[FL]$
اللزوجه الديناميكيه	$[ML^{-1}T^{-1}]$	$[FL^{-1}T]$
اللزوجه الكينماتيه	$[L^{2}T^{-1}]$	$[L^{2}T^{-1}]$
عزم العطاله للسطح	$[L^{4}]$	$[L^{4}]$
عزم العطاله للكتله	$[ML^{2}]$	$[FLT^{2}]$
التوتّر السطحي	$[MT^{-2}]$	$[FL^{-1}]$
معامل المرونة	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$[FL^{-2}]$

وحدة الكميات الكهربائية و المغناطيسية

الكمية	النظام LTIΦ	النظام LT I Q	الوحدة
الشحنه الكهربائيه	Q	$T\ I$	كولمب
سعة الحثّ الكهربائي ε	$M^{-1}\ L^{-3}\ T^{2}\ Q^{2}$	$L^{-1}\ T\ I\ \Phi^{-1}$	فاراد / متر
سعة الحث المغناطيسي μ	$M\ L\ Q^{-2}$	$L^{-1}\ T\ I^{-1}\ \Phi$	أهم ثانيه / متر
كثافة التيار الكهربائي J	$L^{-2}\ T^{-1}\ Q$	$L^{-2}\ I$	آمبر / متر تربيع
التيار الكهربائي	$T^{-1}\ Q$	I	آمبر
شدة الحقل الكهربائي E	$M\ L\ T^{-2}\ Q^{-1}$	$L^{-1}\ \Phi$	فولت / متر
الجهد الكهربائي	$M\ L^{2}\ T^{-2}\ Q^{-1}$	Φ	فولت
السعه الكهربائيه	$M^{-1}\ L^{-2}\ T^{2}\ Q^{2}$	$T\ I\ \Phi^{-1}$	فاراد
المقاومه الكهربائيه	$M\ L^{2}\ T^{-1}\ Q^{-2}$	$I^{-1}\ \Phi$	أهم
شدة الحقل المغناطيسي H	$L^{-1}\ T^{-1}\ Q$	$L^{-1}\ I$	آمبر / متر
الحثّ المغناطيسي	$M\ T^{-1}\ Q^{-1}$	$L^{-2}\ T\ \Phi$	آمبر / متر تربيع
سريان الحقل المغناطيسي	$M\ L^{2}\ T^{-1}\ Q^{-1}$	$T\ \Phi$	وبر
معامل الحثّ	$M\ L^{2}\ Q^{-2}$	$T\ I^{-1}\ \Phi$	هنري
الطاقة الكهربائيه	$M\ L^{2}\ T^{-2}$	$T\ I\ \Phi$	جول
القدرة الكهربائيه	$M\ L^{2}\ T^{-3}$	$I\ \Phi$	واط
الكتلة	M	$L^{-2}\ T^{3}\ I\ \Phi$	كيلو غرام

M الكتلة L الطول T الزمن Q الشحنه الكهربائيه

L الطول T الزمن I التيار الكهربائي Φ الجهد الكهربائي

بعض الروابط و القوانين

v السرعة، x المسافة، t الزمان	$v = \frac{x}{t}$
F القوة ، m الكتلة ، a التعجيل	$F = ma$
ρ الكثافة، m الكتلة ، Vالحجم	$\rho = \frac{m}{V}$
P الضغط ، F القوة ،A المساحة	$P = \frac{F}{A}$
W الشغل (العزم)، F القوة ، d الفاصلة (الطول)	$W = F \cdot d$
Q تدفق الكتلة، ρ الكثافة ، v السرعة، A المساحة	$Q = \rho \cdot v \cdot A$
E الطاقة، W الشغل، t الزمان	$E = \frac{W}{t}$
P كمية الحركة، m الكتلة، v السرعة	$P = m \cdot v$
Q الحرارة المعطاة أو المأخوذة، m الكتلة، C السعة الحرارية، ΔT تغيرات الحرارة	$Q = m \cdot C \cdot \Delta T$
الدفع: F القوة، Δt الفتره الزمنيه، Δ(mv) تغيرات الكتلة في السرعة	$F \cdot \Delta t = \Delta(mv)$
P الضغط تحت الماء، ρ الكثافة، g ثابت جاذبية الأرض، h الأرتفاع	$P = \rho g h$

بعض الثوابت الفيزيائيه

الثابت الفيزيائي	علامته	قيمته	وحدته
ثابت الجاذبيه العام لنيوتن	G	6.67428×10^{-11}	$L^3M^{-1}T^{-2}$
ثابت جاذبية الارض	g	9.806 65	LT^{-2}
ثابت الجاذبية العام لأنشتاين *	k	$2.0766412200 \times 10^{-43}$	$M^{-1}L^{-1}T^2$
سرعة الضوء	c	299 792 458	LT^{-1}
ثابت بلانك	h	$6.626\ 068\ 96 \times 10^{-34}$	ML^2T^{-1}
ثابت المغناطيسيه	μ_O	$1.256\ 637\ 061 \times 10^{-6}$	$M\,LT^{-2}I^{-2}$
شحنة الالكترون	e	$1.602\ 176\ 487 \times 10^{-19}$	C
ثابت الغازات	R	8.314 472	$M\,L^{-1}T^{-2}\,\theta^{-1}$
ثابت ستيفان بولتزمان	σ	$5.670\ 400(40) \times 10^{-8}$	$M\ T^{-3}\,\theta^{-4}$
ثابت بولتزمان	k	$1.380\ 6505 \times 10^{-23}$	$M\,L^2\,T^{-2}\,\theta^{-1}$
كتلة البروتون	m_p	$1.672\ 621\ 637 \times 10^{-27}$	M
كتلة الالكترون	m_e	$9.109\ 382\ 15 \times 10^{-31}$	M
نصف القطر الكلاسيكي للالكترون	r_e	$2.817940\ 2894 \times 10^{-15}$	L
ثابت كولومب	k	$8.987551\ 787\ 4 \times 10^9$	$M\,L^3\,T^{-2}\,C^{-2}$
ثابت فاراداي	F	96 485.3383	$C\,L^{-3}$
ثابت الشحنه الكهربائيه	ε_O	$8.854\ 187\ 817 \times 10^{-12}$	C كولمب
عدد أفوغادرو	N	$6.022\ 1415 \times 10^{23}$	

θ درجة الحرارة

$$*\,k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

الوحدات العيارية

الوحدة	العلامة	نسبة التبديل
الزمن		
الساعة	hr	60 min
الدقيقة	min	60 s الثانيه s
الهرتز	Hz	$\frac{1}{s}$
الطول		
الفوت	ft	0.3048 m متر
الأنج	in	1.0/12.0 ft
الميل	mile	5280.0 ft
البارسك	pc	3.085678×10^{16} m
اليارد	yd	3 ft
أنكستروم	Ang	1×10^{-10} m
الحرارة		
سليسيوس	C	1 K -273.15
رانكين	R	5.0/9.0 K
الفارنهايت	F	1 R -459.67(9/5 * °Celsius + 32 = °Fahrenheit)
كلوين	K	Celsius + 273.15 = Kelvins
الكتلة		
الغرام	g	0.001 kg كيلو غرام kg
الباوند (الكتلة)	lbm	0.45359237 kg
الأونس	الأوز oz	28.34952 g

القوة أو الوزن		
نيوتن	N	1 kg m/s^2
الدين	dyn	1×10^{-5} N
باوند (قوة)	lbf	1 pound force = 4.44822162 Newtons
الطاقة		
الجول	J	1 N m
الوحدة الحرارية الأنجليزيه	BTU	1055.056 J
كالري	Cal	4.1868 J
إلكترون فولت	ev	1.602177×10^{-19} J
طنTNT	TNT	4.184×10^{9} J
القدرة		
وات	W	1 J/s
قوة حصان	hp	745.699872 watts
الضغط		
البار	bar	1×10^{5} N/m^2
باسكال	Pa	1 N/m^2
أتمسفر	atm	1.01325×10^{5} N/m^2
أنج زئبق	inHg	3.387 kPa
مليمتر زئبق	mmHg	0.1333 kPa
الكهرومغناطيس		
كولمب	C	1 A s آمبر A
فولت	V	1 W/A
أهم	Ohm	1 V/A
فارادي	faraday	96485.31 C
فاراد	farad	C/V
وبر	Wb	V s
تسلا	Tesla	Wb/m^2
هنري	H	Wb/A

بعض أشهر الأعداد اللا بعدية

المعادلة	العدد
$R_e = \frac{VD\rho}{\mu}$	**عدد رينولدز** Reynolds number V سرعة المائع أو السائل ، D قطر الأنبوب ، ρ الكثافة ، μ اللزوجه
$P = \frac{F}{\rho V^2 L^2}$	**معامل الضغط** Pressure coefficient F القوة ، ρ الكثافة ، V سرعة المائع أو السائل ، L مميزة الطول مثلاً القطر
$Fr = \frac{V^2}{Lg}$	**عدد فراود** Froude number V سرعة المائع أو السائل ، L مميزة الطول مثلاً القطر ، g تابت جاذبية الأرض
$M = \frac{V}{c}$	**عدد ماخ** Mach number V سرعة المائع أو السائل ، c سرعة الصوت
$W = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$	**عدد وبر** Weber number ρ الكثافة ، V سرعة المائع أو السائل ، L مميزة الطول ، σ الشدّ السطحي وحدته كوحدت اللزوجة (surface tension)
$Nu = \frac{hL}{k}$	**عدد ناسلت** Nusselt number h معامل انتقال الحرارة الحملي ، k الموصّلية الحرارية للمائع L مميزة الطول
$\Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, $\Pr = \frac{C_p \mu}{k}$	**عدد برانتل** Prandtl number υ اللزوجه الكنماتيكيه ، α الأنتثار الحراري ،
$Gr = \frac{\beta \theta g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	**عدد غراشوف** Grashof number μ اللزوجه ، ρ الكثافة ، L مميزة الطول ، g تابت جاذبية الأرض ، θ الحرارة β معامل التمدد الحراري الحجمي

النظريه الجبريه للتحليل البُعدي

من الصعب التفكيك بين نظرية التحليل البُعدي رياضياً وفيزيائاً ، و ذلك لوجود أرتباط وثيق بين القضايا الرياضية لنظرية التحليل البُعدي و المفاهيم الفيزيائية . نتائج مطالعة نظرية التحليل البُعدي بعيداً عن النظريات الفيزيائيه هي عبارة عن مجموعة من القضايا الجبريه لمعادلات فيها نوع من التجانس . تنتهي هذه القضايا الجبريه بقضية بكنجهام (Buckingham).

لشرح الموضوع و بسطه نستعمل هذه الأبعاد الثلاثة فقط [M] و [L] و [T] .

- أذا كانت قيمة كمية x في نظام و حداته [M] و [L] و [T]، و قيمة هذه الكمية $\bar{x}$ في نظام آخر وحداته هي كذلك [M] و [L] و [T]. الرابطة بين هذين الكميتين في هذين النظامين هي:

$$\bar{x} = x[M]^a [L]^b [T]^c$$

مثال: التعجيل في نظام (الباوند bl ، الفوت tf ، الدقيقه nim) يساوي $900\frac{ft}{\min^2}$ ما هي قيمة هذا التعجيل في نظام اخر وحداته (الباوند bl ، الانج ni ، الثانيه ces)؟ بما ان $1ft = 12in$ و $1\min = 60\sec$ لذلك:

$$\bar{x} = 900\frac{ft}{\min^2} \times [M]^0 [12]^1 \frac{in}{ft}\left[\frac{1}{60}\right]^{-2} \frac{\min^2}{\sec^2} = 3\frac{in}{\sec^2}$$

يجب أن يكون مجموع كميتين أو مجموعتين أبعاديتين (أو أكثر) كمية ذات نفس الأبعاد و الوحدات ، على سبيل المثال لا يمكن جمع الطول و الكتلة. في هذه الرابطة $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ يجب أن تكون أبعاد الطرف الأيمن مساوية لأبعاد الطرف الأيسر.

في هذه الدالة $y = x_1^{k_1}.x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ كذلك يجب تساوي أبعاد الطرف الأيمن و الأيسر لذلك:

$$y = [M]^a [L]^b [T]^c$$

$$x_1 = [M]^{a_1 k_1} [L]^{b_1 k_1} [T]^{c_1 k_1}$$

$$x_2 = [M]^{a_2 k_2} [L]^{b_2 k_2} [T]^{c_2 k_2}$$

•

•

•

$$x_n = [M]^{a_n k_n} [L]^{b_n k_n} [T]^{c_n k_n}$$

كي يصبح تجانس بين أبعاد طرفين هذه الرابطة، يجب:

$$\begin{aligned} a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n &= a \\ b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_n k_n &= b \\ c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_n k_n &= c \end{aligned}$$

نظرية بكنجهام : عدد المجموعات اللا بُعدية في أي منظومة يساوي عدد الكميات المؤثرة على تلك المنظومة ناقص عدد الأبعاد أو الوحدات الأساسية في هذه الكميات. كذلك تعرف هذه النظريه، بنظرية π .

مراحل حل المسائل من خلال التحليل البُعدي

- تعين الكميات المؤثره على الشرائط الفيزيائيه للمسئله و عددها n كميه .

- انتخاب نظام أبعادي وحداته مثلا الطول (L) و الكتله (M) و الزمن (T). أو نظام آخر وحداته الطول (L) و القوة (F) و الزمن (T). عدد الوحدات في كل من هذين النظامين هو ثلاثه، و يرمز لعدد الوحدات في كل نظام أبعادي بالحرف r .

- عدد الكميات المتكرره في كل مجموعه لا بعديه هو r ، هذه ليست نتيجه ثابته و للأطمأنان من هذه النتيجه علينا بالخطوة القادمه.

- نعين وحدات كل من الكميات في كلا النظامين أي في TML و TFL إذا كانت النتيجه مساويه في هذه الحاله m = r ، و إلا فعلينا كتابة جدول الوحدات في النظام TML ، و أكبر مرتبة لمصفوفة (لهذا الجدول) محددتها مخالفة للصفر هي r .

- الكميات المهمة و المطلوب تعينها الأفضل أن تكون من بين الكميات المتكرره، و أحياناً للحصول على جواب مقنع نجبر على تغير الكميات المتكرره، فمثلاً إذا كان المطلوب تعين القوة الأفضل أن لا تكون القوة من بين الكميات المتكرره ، و ترتب الكميات حسب أهميتها في المسئلة.

- عدد المجموعات الفاقده للأبعاد هو (n - r) ، اي عدد الكميات المؤثره على المسئله ناقص عدد وحدات الكميات. يرمز لكل مجموعه بلا بُعد بالحرف اليوناني π و π_1 و π_2 و π_3 و π_4 و غيرها .

- اختبار المجموعات الفاقده للأبعاد من خلال تساويها في رابطه أو روابط مثل:

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, ...)$$

من خلال هذا المثال سنشرح هذه المراحل

مثال: أوجد القوة المؤثره على كره قطرها D، في مايع سرعته v و كثافته ρ و لزجته μ ؟

الحل:

دالة القوه بهذه الصورة :

$$F = f(V, D, \rho, \mu)$$

عدد الكميات المؤثره في هذه المسئله هي n =5 و هي: القوة F و السرعه v و القطر D و الكثافه ρ و اللزوجة μ.

نرسم هذا الجدول:

	F	v	D	ρ	μ
M	1	0	1	1	1
L	1	1	0	-3	-1
T	-2	-1	0	0	-1

عدد الوحدات المؤثره على كميات المسئله ثلاثة هي: L و M و L أي r =3.

عدد الكميات المتكرره في كل مجموعه m = r = 3 للأطمأنان من هذه النتيجه نقوم بالخطوه التاليه:

في هذا الجدول مرتبة أكبر مصفوفة، محددتها مخالفه للصفر هي:

(مثلاً ننتخب هذه المحددة)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

هذه المحددة مخالفة للصفر.

إذن مرتبة هذه المصفوفة هي 3×3 لذلك m = 3

من هنا نلاحظ في هذه المسئله إن r = m (أحياناً في بعض المسائل $m \neq r$)

عدد الكميات المتكرره في كل مجموعه لا بعدية هي 3 و ننتخب هذه الكميات ρ و v و D .

عدد المجموعات الفاقده للأبعاد في هذه المسئله هي: $n-r=5-3=2$ هذه المجموعات هي:

$$\pi_1=\rho^a V^b D^c F$$

$$\pi_2=\rho^d V^e D^f \mu$$

$$\pi_1=\rho^a V^b D^c F$$

M:

L:

T:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ -3a+b+c+1=0 \\ -b+(-2)=0 \end{cases}$$

$$\pi_2=\rho^d V^e D^f \mu$$

M:

L:

T:

$$\begin{cases} d+1=0 \\ -3d+e+f+1=0 \\ -e+(-1)=0 \end{cases}$$

من حل هذه المعادلات نحصل على:

$f=-1$ و $e=-1$ و $d=-1$ و $c=-2$ و $b=-2$ و $a=-1$

إذن هذه المجموعات اللا بُعديه هي:

$$\pi_1 = \rho^{-1}V^{-2}D^{-2}F$$

$$\pi_2 = \rho^{-1}V^{-1}D^{-1}\mu$$

إذن:

$$\pi_1 = f(\pi_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(\frac{\mu}{\rho VD})$$

كذلك يمكن كتابة الدالة بهذا الشكل $\pi_1 = f(\pi_2^n)$ و الأس n ليس له أي تأثير على أبعاد الرابطة ، إذن:

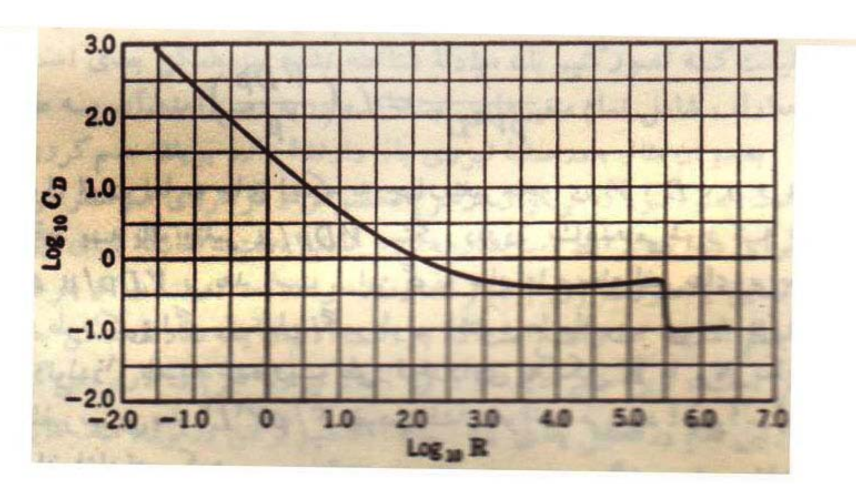
$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(\frac{\rho VD}{\mu}) \Rightarrow F = \rho V^2 D^2 f(R_e)$$

و هذا بمعنى أن القوه المؤثره على الكره في هذا المائع هي تابع من $\frac{\rho VD}{\mu}$ ، تعرف هذه الكمية اللا بُعدية بعدد رينولدز ، و عوضاً من التعامل مع دالة ذات عدة متغيرات ، أصبحت لدينا دالة ذات متغير واحد هو عدد رينولدز R_e. في المختبر من خلال عدة تجارب يمكن الوصول الى رابطه نهائيه يمكن من خلالها تعين القوه المؤثره على الكره.

في الشكل رقم 1 : القوة المؤثرة على كرة ذات سطح غير خشن، لأي كثافة و لزوجة و سرعة لمائع لا أنضغاطي . كل نقطة على هذا الشكل هي بمثابة تجربة على الأنموذج الأصلي، فعلى سبيل المثال قطر كرة (ذات سطح غير خشن) 10 فوت في جهة ريح سرعتها 50 فوت في الثانية في درجة حرارة 60 درجة فارنهايت ، القوة المؤثرة عليها تساوي القوة المؤثرة على كرة (ذات سطح غير خشن) قطرها 1 فوت في أتجاه ريح سرعتها 38 فوت في الثانية ، لأن عدد رينولدز لكلا هذين الأنموذجين مساوي .

نستنتج من هذا المثال:

1- المعلومات التي نحصل عليها من المخطط اللا بُعدي ، أكثر من معلومات المخطط البُعدي.
2- النقاط على المخطط اللا بُعدي يمكن تعينها من خلال نموذج مصغر من الأنموذج الأصلي.



الشكل رقم 1 : القوة المؤثرة على كرة ذات سطح غير خشن في مائع

Refrence: Das Widerstandsproblem, F. Eisner, Proc. 3d Intern Congr. Applied Mechanics, Stockholm, 1931

أي مجموعه لا بُعدية، أس أي عدد تبقى لا بُعدية. مثلاً لتبسيط هذه المجموعتين اللا بُعديتين:

للتخلص من الأسس الكسرية في هذه المجموعتيين اللا بُعديتين نعمل كالآتي:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &= PR^{-\frac{1}{3}}S^{-\frac{1}{4}} \\ \pi_2 &= QR^2S^{-\frac{7}{4}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \pi_1 &= P^{12}R^{-4}S^{-3} \\ \pi_2 &= Q^4R^8S^{-7} \end{aligned}\right.$$

التشابه و التجربة على الأنموذج المصغر

من الأفضل و الأنسب قبل البدأ و تنفيذ أي مشروع أو أطروحة ضخمة و مكلفة العمل و المطالعة على نموذج مصغر(model) من الأنموذج الأصلي (prototype). التحقيقات على الأنموذج المصغر هذا هي بهدف تقليص حجم الخسائر المادية و جمع أكبر كمية ممكنة من المعلومات حول الأنموذج الأصلي. ليس من السهل الأجابة على كل ما يتعلق بالأنموذج الأصلي من خلال الأنموذج المصغر، و أي خطأ في الأنموذج المصغر أو أن الأنموذج المصغر لا يغطي كل تفاصيل الأنموذج الأصلي، فالنتائج ستكون مغايرة، و تهدر الخسائر المادية التي نفقت على تهيئة و تجربة الأنموذج المصغر. الحصول على النتائج نظرياً، يختصر فكرة الأنموذج المصغر و التجربة عليه، لأن تحضير الأنموذج و التجربة عليه يستطلب و قت و نفقات أحياناً تصل الى آلآف الدولارات.

على رغم المحدوديات التي تحيط بالتجربة على الأنموذج المصغر لكنها ذات أهمية بالغة، و في الآونة الأخيرة كثرت الأستفادة من الأنموذج المصغر في الهندسة . هذه بعض النماذج العملية من الأستفادة من الأنموذج المصغر في الهندسة :

- **المشاريع الهيدروليكيه** - بناء نموذج مصغر للكثير من السدود المائية بمقياس يتراوح بين $\frac{1}{20}$ الى $\frac{1}{60}$ من الأنموذج الأصلي.
- **المكائن المائية** – التوربينات و المضخات و الضاغطات و المبدلات الحراريه
- **الطائرات** – التجربة على نموذج مصغر من الطائرة في نفق الهواء تعتبر من التجارب المهمة في صناعة الطائرات . من خلال هذا الأنموذج المصغر داخل نفق الهواء تحسب جميع القوى الآيروديناميكية و التغيرات التي تحدث لجسم الطائرة كالحركات الأرتعاشية و ألتواء الأجنحة خصوصاً في السرعات العالية.
- **السفن** – القوى المؤثرة و المقاومة على السفن
- **الأبنية**
- **الموانئ**

التشابه

نفرض منظومتين أحداهما الأنموذج الأصلي و الأخرى الأنموذج المصغر، و الأحداثي (x, y, z) و الأحداثي (x', y', z') هما لكلا هاتين المنظومتين و يرتبطان بهذه المعادلات:

$$x' = K_x x \quad و \quad y' = K_y y \quad و \quad z' = K_z z \quad و \quad t' = K_t t$$

العوامل K_x و K_y و K_z هي عوامل المقياس في جهة x و y و z إذا كانت هاتين المنظومتين متشابهتين هندسياً في هذه الحالة: $K_x = K_y = K_z = K_L$. العامل K_t عامل مقياس الزمن تظهر أهميته في المنظومات المتناوبه.

التشابه الهندسي

التشابه الهندسي هو في حالة وجود تشابه بين شكل الأنموذج المصغر و شكل الأنموذج الأصلي. يَصغر طول و عرض الأنموذج المصغر بالنسبة للأنموذج الأصلي بنسب متفاوته، و أحياناً تبقى نسبة التصغير (أو المقياس) نسبة ثابته للأنموذج المصغر كله.

هناك تناظر نقطة الى نقطة بين الأنموذج الأصلي و الأنموذج المصغر. توزيع الكتلة في الأنموذج المصغر مشابهة لنظائره في الأنموذج الأصلي، مثلاً نسبة المادة المستخدمه في جزء من جنائح طائره مساوية لنظيره من الأنموذج المصغر.

التشابه الكامل

نتيجة التجربة على الأنموذج المصغر هي مجموعات لا بُعدية $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p$ إذا كانت القيمة العدديه لهذه المجموعات للأنموذج المصغر مساوية للأنموذج الأصلي فالتشابه بين الأنموذج المصغر و الأصلي هو عبارة عن تشابه كامل.

$$\pi_{\text{model}} = \pi_{prototype}$$

التشابه الكينماتي

التشابه الكينماتي هو عبارة عن تشابه الحركة بين أجزاء نظامين ، لتعريف التشابه الكينماتي لابد من وجود تناظر واحد الى واحد بين نقاط و أجزاء الأنموذج الأصلي و الأنموذج المصغر. لذلك التشابه الكينماتي هو: إذا كانت الذرات المتناظره من النظامين في أزمنة متناظرة في مواقع متناظرة فالحركة بين هذين النظامين متشابهه.

في حالة وجود تشابه كينماتي متجهة السرعة و التعجيل متشابه في الجهات المتناظره.

إذا كانت متجهة السرعة في الأحداثي (x,y,z) في جهة المحور x هي u و في الأحداثي (x',y',z') هي u' كذلك في جهة y هي v و v' و في جهة z هي w و w' إذن:

$$w'=(\frac{K_z}{K_t})w \quad \text{و} \quad v'=(\frac{K_y}{K_t})v \quad \text{و} \quad u'=(\frac{K_x}{K_t})u$$

معامل المقياس لسرعة u و v و w بالترتيب هي:

$$\frac{K_z}{K_t} \quad \text{و} \quad \frac{K_y}{K_t} \quad \text{و} \quad \frac{K_x}{K_t}$$

كذلك معامل المقياس للتعجيل هي:

$$\frac{K_z}{K_t^2} \quad \text{و} \quad \frac{K_y}{K_t^2} \quad \text{و} \quad \frac{K_x}{K_t^2}$$

إذا كان هذان النظامان متشابهان هندسياً في هذه الحالة $K_x=K_y=K_z=K_L$ إذن:

$$K_V=\frac{K_L}{K_t}$$ معامل مقياس السرعة

$$K_a=\frac{K_L}{K_t^2}$$ معامل مقياس التعجيل

التشابه الديناميكي

نظامان متشابهان ديناميكيا ً، في حال مجموع القوى على الأجزاء المتناظرة من هذين النظامين متشابهة . أي إذا كانت الكتلة في كل جزء من نظام مشابهة للجزء المتناظر من النظام الآخر في هذه الحالة : $m' = K_m m$ في هذه الرابطة m و m' الكتلة المتناظرة في كل من النظامين، و K_m ثابت.

أستناداً على قانون نيوتن:

$$F'_x = m'a'_x \quad و \quad F'_y = m'a'_y \quad و \quad F'_z = m'a'_z$$

كذلك:

$$F_x = ma_x \quad و \quad F_y = ma_y \quad و \quad F_z = ma_z$$

إذا كان التشابه كذلك كينماتي بين هذين النظامين إذن:

$$\frac{F'_x}{F_x} = \frac{K_m K_x}{K_t^2} \quad و \quad \frac{F'_y}{F_y} = \frac{K_m K_y}{K_t^2} \quad و \quad \frac{F'_z}{F_z} = \frac{K_m K_z}{K_t^2}$$

هذه الروابط هي عبارة عن معامل المقياس بين القوى المؤثرة على الأجزاء المتناظرة بين منظومتين.

إذا كانت هاتين المنظومتين متشابهتين هندسياً أي $K_x = K_y = K_z = K_L$ إذن:

$$K_F = \frac{K_m K_L}{K_t^2}$$

تطبيق التحليل البُعدي في مسائل ميكانيك الموائع

- توزيع سرعة سريان مضطرب لمائع قرب سطح صلب

نفرض سريان مضطرب بحيث متوسط خطوط السريان هي خطوط موازية ، هبوب رياح على سطح واسع أو سريان مائع في أنبوب مستقيم وطويل نماذج من هذا النوع من السريان . سرعة هذا السريان في الفاصله y من هذا السطح تساوي u ، خشونت السطح e ، مميزة الطول L (مثلاً قطر الأنبوب أو طول الصفحة الصلبة التي يتدفق المائع عليها) ، اللزوجة الكينماتية ν ، كثافة المائع ρ ، τ قيمة جهد المائع على هذا السطح . الرابطة بين هذه الكميات هي:

$$f(u, y, e, L, \nu, \rho, \tau) = 0$$

من المعلوم أن كل من النسبتين $\frac{y}{e}$ و $\frac{y}{L}$ هي عدد لابُعدي ، للسهولة نحذف كل من L و e من المصفوفة البُعدية ، تصبح المصفوفة البُعدية بهذا الشكل:

عدد الكميات المؤثره في هذه امصفوفة هي n =5 و هي : السرعة u و الأرتفاع أو ضخامة المائع y و اللزوجة الكينماتية ν و الكثافه ρ و الجهد τ.

نرسم هذا الجدول:

	u	y	ν	ρ	τ
M	0	0	0	1	1
L	1	1	2	-3	-1
T	-1	0	-1	0	-2

عدد الوحدات المؤثره على كميات المسئله ثلاثة هي : L و M و L أي r =3 .
عدد الكميات المتكرره في كل مجموعه m = r = 3 و بما أن $n-r=5-3=2$ إذن نستنتج من هذه المصفوفة عددين لا بُعديين هما:

$$\frac{y}{\nu}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad \text{و} \quad u\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}$$

تعرف هذه النسبة $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ ببُعد السرعة ، و تسمى في ميكانيك الموائع بالسرعة الأحتكاكية و يرمز لها V^* ، لذلك المجموعات اللا بُعدية المؤثرة في هذه المسئلة هي:

$$\frac{yV^*}{\nu} \quad \text{و} \quad \frac{u}{V^*} \quad \text{و} \quad \frac{y}{e} \quad \text{و} \quad \frac{y}{L}$$

ظاهراً العدد $\frac{yV^*}{\nu}$ هو عدد رينولدز ، و يمثل متغير الأحتكاك في الفاصلة التي تقاس بها y . نستنتج من قضية بكنجهام :

$$\frac{u}{V^*}=f(\frac{yV^*}{\nu},\frac{y}{e},\frac{y}{L})$$

إذا كان سريان المائع على صفحة واسعة بحيث لا يمكن تحديد طولها أي لا وجود الى L ، في هذه الحالة تحذف $\frac{y}{L}$ ، و تصبح المعادلة السابقة بهذا الشكل:

$$\frac{u}{V^*}=f(\frac{yV^*}{\nu},\frac{y}{e})$$

من خلال هذه المعادلة يمكن تعين توزيع السرعة لمائع في أنبوب . في فاصلة صغيرة جداً من الطبقة الجدارية ، جهد المائع على السطح ناتج عن لزوجة المائع .

إذا كان سطح الصفحة أو الأنبوب ناعم أو غير خشن تحذف العبارة $\frac{y}{e}$ من المعادلة و تصبح المعادلة بهذا الشكل:

$$\frac{u}{V^*} = f\left(\frac{yV^*}{\nu}\right)$$

يستنتج من هذه المعادلة ، رابطة يمكن من خلالها تعين توزيع سرعة المائع في فاصلة صغيرة من الطبقة الجدارية بشرط $\frac{yV^*}{\nu} > 50$ ، هذه الرابطة هي:

$$\frac{u}{V^*} = 5.75 \times \log_{10}\left(\frac{yV^*}{\nu}\right) + 5.5$$

- **ضاغطة الطرد المركزي**

ضاغطة تقوم بضغط غاز معين . ضغط هذا الغاز حين دخول هذه الضاغطة P_O و ضغطه عند الخروج منها P ، كثافة هذا الغاز ρ ، و سرعة هذه الضاغطة n دورة في الثانية ، قطر الجزء المتحرك من هذه الضاغطة الذي يقوم بضغط الغاز D و m كتلة الغاز الذي يخرج من هذه الضاغطة كل ثانية . الحالة المبسطة لهذه المسئلة هي نفرض أن الأنموذج الأصلى يُبرّد بالماء ، كذلك أثر الجاذبية على الغازات ضئيل جداً و يمكن غضّ النظر عنه . إذن الرابطة بين هذه الكميات هي:

$$P = f(P_o, \rho, m, n, D)$$

من نظرية التحليل البُعدي و قضية بكنجهام نصل لهذه الرابطة:

$$P = P_o f\left(\frac{m}{nD^3\rho}, \frac{P_o}{n^2D^2\rho}\right)$$

$Q = \frac{m}{\rho}$ هو حجم الهواء الخارج من الضاغطة في كل ثانية ، و سرعة الصوت هي $c = \sqrt{1.4\frac{P_o}{\rho}}$

هذه الرابطتين هما بالنسبة لخصائص الغاز الذي يدخل الضاغطة . تصبح الرابطة لهذه المسئلة بهذا الشكل:

$$\frac{P}{P_o} = f_1\left(\frac{Q}{nD^3}, \frac{c}{nD}\right)$$

لتعين الكفاءة η في هذا النوع من الضاغطات يمكن الأستفادة من هذه الرابطة:

$$\eta = f_2\left(\frac{Q}{nD^3}, \frac{c}{nD}\right)$$

- **مضخة الطرد المركزي**

الكميات المؤثرة في هذه المسئلة هي : قطر الجزء المتحرك من هذه المضخة الذي يقوم بضخّ المائع هو D ، كثافة المائع ρ ، سرعة محورهذه المضخة n دورة في الثانية ، حجم المائع الذي يخرج من هذه المضخة في الثانية Q ، الضغط قبل و بعد الضخّ P_1 و P_2 ، و الأرتفاع الهايدروليكي لهذه المضخة يحسب من هذه الرابطة: $P=(P_2+\rho g h_2)-(P_1+\rho g h_1)$ ، أثر اللزوجة ضئيل ، من التحليل البُعدي نحصل على هذه الكميات اللا بُعدية في هذه الرابطة :

$$\frac{D^3 n}{Q}=f_1(n\sqrt[4]{\frac{Q^2\rho^3}{P^3}})$$

تعرف هذه الكمية اللا بُعدية $\sqrt[4]{\frac{Q^2\rho^3}{P^3}}$ بالسرعة الخاصة.

لتعين الكفاءة η في هذا النوع من المضخات يمكن الأستفادة من هذه الرابطة:

$$\eta=f_2(n\sqrt[4]{\frac{Q^2\rho^3}{P^3}})$$

تطبيق التحليل البُعدي في نظرية أنتقال الحرارة

- **التكثيف على أنبوب قائم**

بخار مُشبع في درجة حرارة θ ينساب في أنبوب قائم درجة حرارتة θ Δ- θ ، المائع المتكثف على السطح الخارجي للأنبوب يشكل ضخامة عائقة على هذا الأنبوب k معامل الحمل الحراري لهذا المائع وحدته $(\frac{ML}{T^3\theta})$ في هذه المسئلة تضاف وحدة جديدة الحرارة θ الى وحدات الكتلة و الطول و الزمن.

يرتبط تكثيف المائع بمعامل الأنتقال الحراري h ، وحدته $(\frac{M}{T^3\theta})$.

سريان المائع المتكثف على الأنبوب يرتبط بلزوجة المائع μ و بوزن المايع ρ g (ρ كثافة المائع و g تعجيل جاذبية الأرض)

أهمية حجم المائع في هذه المسئلة أكثر من كتلة المائع ، لذلك حرارة التبخير في وحدة الحجم هي λρ (ρ كثافة المائع وλ معامل حرارة التبخير)

ليس لقطر الأنبوب أي أهمية في هذه المسئلة و ذلك لأن ضخامت المائع المتكثف على الأنبوب بالنسبة الى قطر الأنبوب D لا شئ.

ضخامة المائع المتكثف على طول الأنبوب L متغيرة، لذك طول الأنبوب كمية مؤثرة على شرائط المسئلة.

تؤثر سرعة البخار داخل الأنبوب على ضخامت المائع المتكثف على السطح الخارجي للأنبوب ، لذلك إذا كانت سرعة البخار داخل الأنبوب قليلة تصبح ضخامت المائع المتكثف قليلة. إذا غضّينا النظر عن التأثير المتقابل بين البخار و المائع داخل الأنبوب في هذه الحالة لن تؤثر كثافة المائع داخل الأنبوب على المسئلة. الكثافة التي تؤثر هي كثافة المائع المتكثف على الأنبوب ρ.

إذن ، نظراً لهذا التحليل لشرائط المسئلة الرابطة بين كميات المسئلة هي:

$$f(h, \Delta\theta, L, \rho\lambda, k, \rho g, \mu) = 0$$

المصفوفة الناتجة من كميات هذه المسئلة بالنسبة للوحدات هي :

k_n:	1	2	3	4	5	6	7
	h	$\Delta\theta$	L	$\rho\lambda$	k	ρg	μ
M	1	0	0	1	1	1	1
L	0	0	1	−1	1	−2	−1
T	−3	0	0	−2	−3	−2	−1
θ	−1	1	0	0	−1	0	0

رتبة أكبر مصفوفة محددتها مخالفة للصفر تساوي أربعة (4 هي عدد الوحدات المؤثرة أو رتبة المصفوفة التي محددتها مخالفة للصفر) ، إذن إستناداً على قضية بكنجهام عدد الكميات المؤثرة في هذه المسئلة 7 ناقص 4 الحاصل ثلاثة ، أي عدد المجموعات الضربية أو للا بُعدية في هذه المسئلة هي 3 .

معامل الكتلة و الطول و الزمن و الحرارة لهذه المجموعات اللا بُعدية هي :

M: $k_1 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 = 0$

L: $k_3 - k_4 + k_5 - 2k_6 - k_7 = 0$

T: $-3k_1 - 2k_4 - 3k_5 - 2k_6 + k_7 = 0$

θ: $-k_1 + k_2 - k_5 = 0$

جواب هذه المعامل هو :

	1	2	3	4	5	6	7
	h	$\Delta\theta$	L	$\rho\lambda$	k	ρg	μ
π_1	1	0	0	1	–1	–1	0
π_2	0	1	0	–4	1	2	1
π_3	0	0	1	–1	0	1	0

هذه المجموعات اللا بُعدية هي :

$$\pi_1 = \frac{h\lambda}{kg}$$

$$\pi_2 = \frac{k\mu g^2 \Delta\theta}{\rho^2 \lambda^4}$$

$$\pi_3 = \frac{gL}{\lambda}$$

المعادلة النهائية لهذه الأعداد اللا بُعدية لكميات هذه المسئلة إستناداً على قضية بكنجهام هي :

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \quad \text{أو} \quad f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

لذا:

$$\frac{h\lambda}{kg} = f\left(\frac{k\mu g^2 \Delta\theta}{\rho^2 \lambda^4}, \frac{gL}{\lambda}\right)$$

من خلال هذه المعادلة يمكن رسم بياني بحيث المحور العمودي فيه هو $\frac{gL}{\lambda}$ ، و المحور الأفقي هو $\frac{k\mu g^2\Delta\theta}{\rho^2\lambda^4}$ ، و المعامل $\frac{h\lambda}{kg}$ في هذا البياني هو بشكل منحنيات تكون عليها هذه القيمة ($\frac{h\lambda}{kg}$) ثابتة.

توصل نوسلت (W. Nusselt) من خلال فرض سريان المائع على السطح الخارجي للأنبوب هو سريان سلس و هادئ ، الى هذا القانون :

$$h = 0.943\sqrt[4]{\frac{g\rho^2\lambda k^3}{L\mu\Delta\theta}}$$

حسب الأعداد اللا بُعدية التي توصلنا اليها يصبح هذا القانون بهذا الشكل :

$$\pi_1 = \frac{0.943}{\sqrt[4]{\pi_2\pi_3}}$$

أحياناً لا تتشكل طبقة من المائع المتكثف على السطح الخارجي للأنبوب ، بل تتشكل قطرات من المائع المتكثف في هذه الحالة يؤثر الجهد السطحي للمائع و خشونت السطح على نتائج المحاسبات و يجب إدخال هذه الكميات في المعادلة الأساسية للتحليل البُعدي أي في المعادلة $f(h,\Delta\theta,L,\rho\lambda,k,\rho g,\mu)=0$ و إعادة الحل من جديد مع وجود هاتين الكميتين.

تطبيق التحليل البُعدي في مسائل الجهد و الإنفعال

- الأنحرافات القصوى في الأنظمه المرنه

في الأنظمة المرنه إذا كانت الرابطة بين القوة و الإنحراف رابطة غير خطية في هذه الحالة قيمة الإنحراف عالية ، على سبيل المثال في الرابطة بين القوة و الإنحرافات التي تحدث على سطح غشاء رابطة غير خطية .

نفرض نظاماً مرناً ذو شكل خاص تحت تأثير قوة معينة ، في هذه الحالة هناك قوة مؤثرة F على جزء من طول L هذا النظام ، و كمية الحرك M يمكن من خلالهن تعين معامل الجهد σ على أي نقطة من هذا النظام ، هذه المعادلة هي بهذا الشكل :

$$\sigma = f(F, M, L, E.\nu)$$

في هذه المعادلة E معامل يونغ (نسبة الجهد الى الأنفعال $E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}$) و ν نسبة بواسون (نسبة الأنفعال الجانبي الى الأنفعال المحوري $\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$) . نتيجة التحليل البُعدي لهذه الكميات هذه الأعداد اللا بُعدية في هذه الرابطة :

$$\sigma = \frac{F}{L^2} f_1(\frac{F}{EL^2}, \frac{M}{FL}, \nu)$$

تطبيق التحليل البُعدي في مسائل فيزياء الكمّ

- قانون أشعاع بلانك[1]

ترتبط الكثافة الطيفية u بأنبعاث الأشعاع الألكترومغناطيسي في تونر $\nu = \frac{c}{\lambda}$ لجسم أسود بدرجة حرارة T . هذه الأشعاعات هي نتيجة تذبذب ذو طاقة $k_B T$ يُحمل على فوتونات تسير بسرعة الضوء c في رزم من الطاقة h ν ، إذا كانت الكثافة الطيفية تابع من هذه الكميات ما هي نتيجة التحليل البعادي لهذه المسئلة ؟

$$f(u, \lambda, h, c, k_B, T) = 0$$

k_B ثابت بولتزمان و h ثابت بلانك و λ طول الموج

وحدات هذه الكميات هي:

$$[u] = M^1 L^{-2} T^{-2} \theta^0 = ML^{-2} T^{-2}$$

$$[\lambda] = M^0 L^1 T^0 \theta^0 = L$$

$$[h] = M^1 L^2 T^{-1} \theta^0 = MLT^{-1}$$

$$[c] = M^0 L^1 T^{-1} \theta^0 = LT^{-1}$$

$$[k_B] = M^1 L^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

$$[T] = M^0 L^0 T^0 \theta^1 = \theta$$

---

1) 100 Years of dimensional analysis: new steps toward empirical law deduction, Mtaylor, A I Diaz, Jodar-Sanchez and R J Villanneva-Mico

المصفوفه لهذه الكميات و الأبعاد هي :

	u	λ	h	c	k_B	T
M	1	0	1	0	1	0
L	–2	1	2	1	2	0
T	–2	0	–1	–1	–2	0
θ	0	0	0	0	–1	1

درجة أكبر مصفوفة محددتها مخالفه للصفر في هذه المصفوفة هي أربعة .
الكميات المؤثرة في هذه المسئلة هي 6 كميات و الوحدات الأساسية هي أربعة وحدات (الكتلة ، الطول ، الزمن و الحرارة) إذن أستناداً على قضية بكنجهام عدد الأعداد اللا بُعدية في هذه المسئلة هي أثنان ، و هما:

$$\pi_1 = u^1 \lambda^0 h^4 c^4 k_B^{-5} T^{-5} = \frac{uh^4 c^4}{k_B^{-5} T^{-5}}$$

$$\pi_2 = u^0 \lambda^1 h^{-1} c^{-1} k_B^1 T^1 = \frac{\lambda k_B T}{hc}$$

الرابطة بين هذه الأعداد اللا بُعدية هي :

$$u = \frac{k_B^5 T^5}{h^4 c^4} F_1(\pi_2) = \frac{hc}{\lambda^5} \frac{F_1(\pi_2)}{\pi_2^5} \equiv \frac{hc}{\lambda^5} F(\frac{hc}{\lambda k_B T})$$

$$u \equiv \frac{hc}{\lambda^5} F(\frac{hc}{\lambda k_B T})$$

قانون بلانك للكثافة الطيفية المنبعثة من الأشعاع الألكترومغناطيسي هو :

$$u = 8\pi \frac{hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

e عدد نابير

من مقايسة هذا القانون مع النتيجه الحاصله من التحليل البُعدي نستنتج مدى أهمية هذه النظريه في حصر القانون بالكميات المؤثرة عليه فقط . أجراء عدة تجارب مختبريه على الكميات المؤثرة على المسئلة و كذلك وجود الرابطة $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \cdots)$ تساعدنا في أستخراج أو أكتشاف القانون النهائي .

بعض الأسئلة و أجوبتها في نظرية التحليل البُعدي

هذه الأمثلة هي بمثابة تمارين في التحليل البُعدي و نظرية الأنموذج . للحصول على مهارة و تجربة كافية في تجزئة و تحليل المسائل الميكانيكية و الفيزيائية و أثر الكميات الفيزيائية على بعضها و كيفية إدخالها في التحليل البُعدي و الحصول على القانون النهائي أطلب من الطلاب و قرآء هذا الكتاب أن يقوموا بحلّ هذه الأسئلة حلاً تفصيلاً و ذلك بكتابة مصفوفة الأبعاد و محددتها و الوصول الى الأعداد اللا بُعدية من ثم الحصول على النتيجة النهائية .

السؤال 1

أرتفاع الجزر و المدّ h الناتج عن هبوب رياح على بحيرة يرتبط بهذه العوامل: عمق البحيرة D ، طول البحيرة L ، الكثافة الوزنية للماء w ، جهد قصّ الهواء على الماء τ . ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة التي يمكن من خلاله تعين أرتفاع الجزر و المدّ ؟

الجواب:

$$h = Df\left(\frac{L}{D}, \frac{\tau}{wD}\right)$$

السؤال 2

مائع يتدفق من منفث في الجوّ نحو الأعلى ، ماهي الكميات المؤثرة على وصول هذا المائع الى أقصى أرتفاع ؟ و ماهي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

الجواب:

h الأرتفاع الذي يصل اليه المائع

D قطر المنفث

V سرعة المائع

ρ_a كثافة الهواء

ρ كثافة المائع

μ_a لزوجة الهواء

σ التوتر السطحي للمائع (على سبيل المثال التوتر السطحي للماء في درجة حرارة 20^o C يساوي $0.072\frac{N}{m}$)

$$h = Df\left(\frac{VD\rho_a}{\mu_a}, \frac{V^2}{gD}, \frac{\rho V^2 D}{\sigma}, \frac{\rho_a}{\rho}\right)$$

السؤال 3

أذكر الكميات المؤثره على السرعة الحدّية لقطرة مطرعند سقوطها ؟ ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

الجواب:

w الكثافة الوزنية لقطرة المطر أي ρg

σ التوتر السطحي للمائع (على سبيل المثال التوتر السطحي للماء في درجة حرارة 20^{o} C يساوي $(0.072\frac{N}{m}$

ρ كثافة الهواء

μ لزوجة الهواء

V السرعة الحدّية لقطرة مطرعند سقوطها

$$V = \sqrt{\frac{\sigma}{D\rho}}\, f\left(\frac{wD^2}{\sigma}, \frac{D\sigma\rho}{\mu^2}\right)$$

السؤال 4

قطرة من مائع تسقط في حوض ، عمود من المائع أرتفاعه h يتدفق الى الأعلى و خارج سطح الماء نتيجة سقوط هذه القطرة عليه ، أذكر الكميات المؤثرة على هذا الأرتفاع ؟ و ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذا الأرتفاع ؟

الجواب:

m كتلة قطرة الماء ، و سرعتها V

σ التوتر السطحي للمائع

ρ كتلة المائع ، μ لزوجة المائع

g تعجيل جاذبية الأرض

$$h = \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{g\rho^2}}\, f\left(\frac{m\rho g}{\mu^2}, \frac{\rho V^3}{\mu g}, \frac{\rho\sigma^3}{g\mu^4}\right)$$

السؤال 5

ما هي الكميات المؤثرة على ، الوزن بالنسبة لسطح (الأرض) لرمال متناثرة في الجوّ نتيجة هبوب رياح (منتظمة) في صحراء ؟ نفرض قطر حبات الرمال مساوية ، ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

الجواب:

V سرعة الرياح

D قطر حبة الرمل

w الكثافة الوزنية للرمل (بالنسبة للحجم)

ρ كثافة الهواء

μ لزوجة الهواء

w_{sand} وزن الرمال المتناثرة بالنسبة لسطح (الأرض في تلك الناحية من الفضاء)

$$w_{sand} = \rho V^2 f\left(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{wD}{\rho V^2}\right)$$

السؤال 6

طائرة تحلق في جوّ ممطر ، نفرض أن قطر قطرات المطر مساوية و شكل مقدمة الطائرة معلوم ، ما هي الكميات المؤثرة التي يمكن من خلالها تعين عدد قطرات المطر المرتطمة بمقدمة الطائرة في الثانية ؟ و ما هو نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

الجواب:

L مميزة الطول في الطائرة

D قطر قطرة المطر

N عدد قطرات المطر في وحدة الحجم

ρ كثافة الماء

σ التوتر السطحي للمائع

ρ_a كثافة الهواء

μ_a لزوجة الهواء

V سرعة الطائرة

g تعجيل جاذبية الأرض

n عدد قطرات المطر المرتطمة بمقدمة الطائرة

$$n = VNL^2 f\left(\frac{L}{D}, \frac{\rho_a}{\rho}, \frac{VL\rho_a}{\mu_a}, NL^3, \frac{V^2}{gD}, \frac{\sigma}{\rho V^2 D}\right)$$

هذه بعض الأسئلة تخص الأنموذج و الأرتباط بين الأنموذج المصغر و الأنموذج الأصلي

السؤال 7

جسمان كرويان متساويان الوزن مختلفان الأقطار و النسبة بين قطريهما هي $\frac{1}{3}$ ، يرميان بدون سرعة أولية من بالون ما هي السرعة الحدّية لهما ؟ (السرعة الحدّية هي السرعة التي فيها تصبح قوة مقاومة الرياح على الجسم مساوية لوزن الجسم) . هل سريان الرياح على هذين الجسمين مساوي ؟ لماذا ؟

الجواب:

$\frac{1}{3}$ ، سريان الرياح على كلا الجسمين مساوي .

السؤال 8

أنموذج مصغر من سفينه فضائية شبيه للأنموذج الأصلي ، نسبة التصغير أو المقياس $\frac{1}{10}$ ، يرتفع الأنموذج المصغر عن الأرض عندما تصل سرعته $30\frac{mil}{hr}$ ميل في الساعة . ما هي السرعة التي يرتفع بها الأنموذج الأصلي عن الأرض ؟ مع غضّ النظر عن لزوجة الرياح .

الجواب:

$94.9\frac{mil}{hr}$

السؤال 9

لأختبار أنموذج مصغر مقياسه $\frac{1}{2}$ من الأنموذج الأصلي في نفق الرياح ، بحيث عدد ماخ و عدد رينولدز لكلا الأنموذجان مساوي ، يعمل الأنموذج الأصلي في الشرائط العيارية للهواء ، و الهواء في نفق الرياح في درجة حرارة عيارية ، ما هي كثافة الهواء في نفق الريح ؟ اللزوجة الديناميكية و عدد ماخ يرتبطان فقط بدرجة الحرارة .

الجواب:

$0.00476\frac{slug}{ft^3}$ وحدة الكتلة في النظام الأنجليزي slug ، و نسبة التبديل $1\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} = 515.378818\frac{kg}{m^3}$

السؤال 10

أنموذج مصغر مقياسه $\frac{1}{8}$ من الأنموذج الأصلي لسفينة . إذا كان وزن السفينة 100000 باوند ، و قدرة السفينة 8000 حصان بخار ، إذا غضّينا النظر عن اللزوجة ، أحسب هذه الكميات ؟

- مقياس السطح ج. $\frac{1}{64}$
- مقياس الحجم ج. $\frac{1}{512}$
- مقياس الوزن ج. $\frac{1}{512}$
- مقياس القوة ج. $\frac{1}{512}$
- مقياس السرعة ج. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- مقياس التعجيل ج. 1
- السرعة الدورانية للمروحة ج. $2\sqrt{2}$
- وزن الأنموذج المصغر ج. $195lb$
- قدرة الأنموذج المصغر ج. $5,54hp$

السؤال 11

ما هو نتيجة التحليل البُعدي لهذه المعادلة:

$$H = f(m, \mu, \varepsilon, c, R, I)$$

H شدة الحقل المغناطيسي

m الكتلة

μ سعة الحثّ المغناطيسي

ε سعة الحثّ الكهربائي

c سرعة الضوء

R المقاومه الكهربائيه

I التيار الكهربائي

الجواب:

$$\frac{Hmc^3}{I^3R} = f(\frac{\mu c}{R}, \varepsilon cR)$$

معجم بعض مصطلاحات نظرية التحليل البُعدي

(عربي - إنجليزي)

dilation	أتساع
amplitude	أتساع - نطاق
stress	إجهاد - جهد
shear stress	إجهاد القصّ
coordinate	إحداثي
test	أختبار
linearly dependent	أرتباط أو عدم أستقلال خطيّ
application	أستعمال – تطبيق
stability	أستقرار
linearly independent	أستقلال خطيّ
turbulence	إضطراب دوامي
arbitrary	أعتباطي
friction	الأحتكاك
bending	الألتواء
deflection	الأنحراف
compression	الأنضغاط
conductivity	الإيصالية
ambient	البيئة
free stream	التدفق الحرّ
clearance	الترخيص – فسحة فارغة
acceleration	التعجيل أو التسارع
torsion	إلتواء
surface tension	التوتّر السطحي
heat	الحرارة
critical	الحرجة
continuity	الحفاظ – المتصلية
field	الحقل
convection	الحمل الحراري
accuracy	الدقة
vortex	الدوامة
velocity	السرعة
flow	السريان – التدفق
capacity	السعة
heat capacity	السعة الحرارية

tension	الشدّ
boundary conditions	الشروط الحدّية
pressure	الضغط
boundary layer	الطبقة الجدارية
phenomenon	الظاهرة
factor	العامل: المضروب أو المضروب فيه
moment	العزم
flux	الفيض
canal	القناة
force	القوة
density	الكثافة
efficiency	الكفاءة
elastic	المرونة
convertor	المسخن بالحمل الحراري
coefficient	المعامل
thermal conductivity	الموصّلية الحرارية
ratio	النسبة
prototype	الأنموذج الأصلي
conductor	الهادي
form	الهيئة
matter	أمر – مادة
pipe	أنبوب
tube	أنبوب
diffusivity (thermal)	إنتشارية (حرارية)
convection of heat	انتقال الحرارة بالحمل
curvature	إنحناء – تقوّس
strain	إنفعال
vapor	بخار
saturated vapour	بخار مُشبع
dimention	بعد
dimentional	بعدي
Buckingham	بكنجهام
pendulum	بندول
gate	بوابة
trivial	تافه
evaporation	تبخير
estimate	تثمين – تخمين

empirical	تجريبي
buckling	تحدب
transformation	تحويل
superposition	تراكب
concentration	تركز
linear combination	تركيبة خطية
similarity	تشابه
geometrically similarity	تشابه هندسي
distortion	تشوّه
disturbance	تشويش
perturbation	تشويش
collision	تصادم
damping	تضاؤل
approximate	تقريبي
constraint	تقييد
condensation	تكثيف
cavitation	تكهف – تكوّن تجاويف مملوءة بالبخار
thermal expansion	تمدد حراري
Equilibrium	توازن
current	تيار
current	تيار
constant	ثابت
elastic constant	ثابت المرونة
load	ثقل
root	جذر
airflow	جريان الهواء
body	جسم
fuselage	جسم طائرة
wing	جناح
electric potential	جهد كهربائي
boundary	حدّ
field	حقل
property	خاصية
error	خطأ
circuit	دائرة (كهربائية)
cycle	دورة
chart	رسم بياني

laminar	رقيق
angle	زاويه
spring	زنبرك
stationary	ساكن
smooth	سلس أو هادئ أو ناعم
charge	شحنه
intensity	شدّة
shape	شكل
array	صفيفة
class	طبقة – صنف -
centrifugal	طرد مركزي
float	طفو
phase	طور
beam	عارضة حديدية
numerical	عددي
symble	علامة
component	عنصر أو جزء أساسي
nonlinear	غير خطيّة
orifice	فوهة
compressible	قابل للأنضغاط
basic	قاعدة
lemma	قضية إضافية مفروض صحتها
drop	قطرة – هبوط
diagonal	قطرية
peak	قمة
mass	كتلة
momentum	كمية الحركة
dimensionless	لا بعدي
vnviscous	لا لزج
viscosity	لزوجة
kinematics' viscosity	لزوجة كينماتية
liquid	مائع
fluid	مائع في الحالة السائلة و الغازية
material	مادي
variable	متغير
equivalent	متكافئ
average	متوسط

optimal	مُثلى – قصوى
inductance	مُحاثّة
determinate	محدّد - مقرّر
determinant	محددة
axis	محور
outlet	مخرج – منفذ
order	مرتبة
angular	مزوي
trajectory	مسار
stable	مستقر
independent	مستقل
cofactor	مصاحب
matrix	مصفوفة
pump	مضخة
turbulent	مضطرب
coefficient	معامل
elastic modulus	معامل المرونة
youngs Modulus	معامل يونغ
strength	مقاومة
yield strength	مقاومة الخضوع
nozzel	منفث
characteristic	ميزة
flow rate	نسبة التدفق
poisson's Ratio	نسبة بواسون
theory	نظريه
wind tunnel	نفق الريح
yield point	نقطة الخضوع
model	نموذج
ultimate	نهائي
immerse	يغطس
twist	يفتل
excite	يهيّج

معجم بعض مصطلحات نظرية التحليل البُعدي

(إنجليزي - عربي)

acceleration	التعجيل أو التسارع
accuracy	الدقة
airflow	جريان الهواء
ambient	البيئة
amplitude	أتساع - نطاق
angle	زاويه
angular	مزوي
application	أستعمال – تطبيق
approximate	تقريبي
arbitrary	أعتباطي
array	صفيفة
average	متوسط
axis	محور
basic	قاعدة
beam	عارضة حديدية
bending	الألتواء
body	جسم
boundary	حدّ
boundary conditions	الشروط الحدّية
boundary layer	الطبقة الجدارية
Buckingham	بكنجهام
buckling	تحدب
canal	القناة
capacity	السعة
cavitation	تكهف – تكوّن تجاويف مملوءة بالبخار
centrifugal	طرد مركزي
characteristic	ميزة
charge	شحنه
chart	رسم بياني
circuit	دائرة (كهربائية)
class	طبقة – صنف -
clearance	الترخيص – فسحة فارغة
coefficient	المعامل
coefficient	معامل

cofactor	مصاحب
collision	تصادم
component	عنصر أو جزء أساسي
compressible	قابل للأنضغاط
compression	الأنضغاط
concentration	تركز
condensation	تكثيف
conductivity	الإيصالية
conductor	الهادي
constant	ثابت
constraint	تقييد
continuity	الحفاظ – المتصلية
convection	الحمل الحراري
convection of heat	انتقال الحرارة بالحمل
convertor	المسخن بالحمل الحراري
coordinate	إحداثي
critical	الحرجة
current	تيار
current	تيار
curvature	إنحناء – تقوّس
cycle	دورة
damping	تضاؤل
deflection	الأنحراف
density	الكثافة
determinant	محددة
determinate	محدّد - مقرّر
diagonal	قطرية
diffusivity (thermal)	إنتشارية (حرارية)
dimensionless	لا بعدي
dimention	بعد
dimentional	بعدي
distortion	تشوّه
disturbance	تشويش
drop	قطرة – هبوط
efficiency	الكفاءة
elastic	المرونة
elastic constant	ثابت المرونة

elastic modulus	معامل المرونة
electric potential	جهد كهربائي
empirical	تجريبي
Equilibrium	توازن
equivalent	متكافئ
error	خطأ
estimate	تثمين – تخمين
evaporation	تبخير
excite	يهيّج
factor	العامل: المضروب أو المضروب فيه
field	الحقل
field	حقل
float	طفو
flow	السريان – التدفق
flow rate	نسبة التدفق
fluid	مائع في الحالة السائلة و الغازية
flux	الفيض
force	القوة
form	الهيئة
free stream	التدفق الحرّ
friction	الأحتكاك
fuselage	جسم طائرة
gate	بوابة
geometrically similarity	تشابه هندسي
heat	الحرارة
heat capacity	السعة الحرارية
immerse	يغطس
independent	مستقل
inductance	مُحاثّة
intensity	شدّة
kinematics' viscosity	لزوجة كينماتية
laminar	رقيق
lemma	قضية إضافية مفروض صحتها
linear combination	تركيبة خطية
linearly dependent	أرتباط أو عدم أستقلال خطيّ
linearly independent	أستقلال خطيّ
liquid	مائع

load	ثقل
mass	كتلة
material	مادي
matrix	مصفوفة
matter	أمر – مادة
model	نموذج
moment	العزم
momentum	كمية الحركة
nonlinear	غير خطيّة
nozzel	منفث
numerical	عددي
optimal	مُثلى – قصوى
order	مرتبة
orifice	فوهة
outlet	مخرج – منفذ
peak	قمة
pendulum	بندول
perturbation	تشويش
phase	طور
phenomenon	الظاهرة
pipe	أنبوب
poisson's Ratio	نسبة بواسون
pressure	الضغط
property	خاصية
prototype	الأنموذج الأصلي
pump	مضخة
ratio	النسبة
root	جذر
saturated vapour	بخار مُشبع
shape	شكل
shear stress	إجهاد القصّ
similarity	تشابه
smooth	سلس أو هادئ أو ناعم
spring	زنبرك
stability	أستقرار
stable	مستقر
stationary	ساكن

strain	إنفعال
strength	مقاومة
stress	إجهاد - جهد
superposition	تراكب
surface tension	التوتّر السطحي
symble	علامة
tension	الشدّ
test	أختبار
theory	نظريه
thermal conductivity	الموصّلية الحرارية
thermal expansion	تمدد حراري
torsion	إلتواء
trajectory	مسار
transformation	تحويل
trivial	تافه
tube	أنبوب
turbulence	إضطراب دوامي
turbulent	مضطرب
twist	يفتل
ultimate	نهائي
vapor	بخار
variable	متغير
velocity	السرعة
wind tunnel	نفق الريح
wing	جناح
viscosity	لزوجة
vnviscous	لا لزج
vortex	الدوامة
yield point	نقطة الخضوع
yield strength	مقاومة الخضوع
youngs Modulus	معامل يونغ

المصادر

هذا الكتاب هو ترجمة من هذا الكتاب :

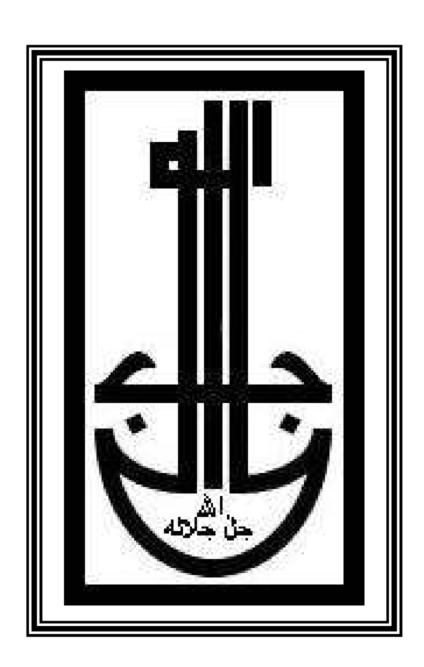
- Dimensional Analysis and Theory of Models , Henry L. Langhaar , John Wiley & Sons, INC. 1971

المصادر الأخرى :

- 100 Years of dimensional analysis: new steps toward empirical law deduction, Mtaylor, A I Diaz, Jodar-Sanchez and R J Villanneva-Mico
- http://en.wikipedia.org/wiki/Physical_constant

- معجم الرياضيات (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. علي مصطفى بن الأشهر، أكاديما.
- معجم الفيزياء (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. أبراهيم حموده، أكاديما.
- المورد ، قاموس إنجليزي – عربي ، منير البعلبكي – دار العلم للملايين.

الفهرس



موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com